독립심화학습 8주차

2017103580 김정운

다음과 같은 최적제어문제를 생각해보자. Min subject to 이 문제는 몇 가지 특징을 가지고 있는데, 우선 미분방정식 외 state에 대한 제약조건이 없다. 현실의 많은 문제들은 물리적 한계가 있기 때문에, 이를 반영해여 문제를 풀어야 하는 경우들이 많다. 또한 terminal time이 고정되어 있는데, 이를 변수로 취급해서 문제를 설정할 수 있다. 이 때는 state뿐만 아니라 time에 대한 neighborhood도 고려해야 한다.

우선 state에 대한 제약조건이 추가된 경우의 제어문제를 고려하자. 이러한 제약조건을 추가했을 때 adjoint equation을 수정하는 방법은 2가지가 있지만, 이들은 동일한 맥락을 가지고 있다. 먼저 제약조건을 대입하여 기존의 방정식을 수정하는 방법이 있다. 즉 자유도를 줄이는 것인데, 이는 식이 복잡하거나 제약조건과 변수가 많은 경우에 사용하기 어렵다는 단점이 있다. 다른 하나는 state의 제약조건을 하나의 변수로 취급하여 adjoint equation에 추가하는 것이 있다.

이라는 제약조건이 추가되었다고 한다면(는 k개의 제약조건 를 성분으로 하는 벡터) , 을 기존 state에 대한 미분방정식에 추가한다. 는 heavy-side step function으로 제약조건을 만족하면 0, 그렇지 않으면 1을 부과하는 함수이다. 일종의 페널티로 제약조건을 만족하지 않은 상황으로 control과 state를 얻는 것을 방지한다. 이후 나머지 연산은 기존의 adjoint equation과 동일하다.

이를 다른 방식으로 설명해보면 기존의 cost-function =H(t,x,u,p,)에 라그랑지안 승수 <λ,를 더한 다음에, 기존과 같은 방식으로 최적제어문제를 푼다고 할 수 있다. 이러한 방식으로 문제를 풀어야 하는 이유는 Fritz John의 필요조건 때문인데, 이에 대한 증명은 학부수준을 넘어가기 때문에 생략한다. 만약 state에 대한 제약조건에 control u(t)가 포함된다고 하면, 기존 state에 대한 제약조건이 추가된 것과는 다른 방식으로 문제를 풀어야 한다. 이는 차후 자세히 설명할 예정이다.

Final time이 변수라고 한다면, locally optimal control을 구할 때 state의 neighborhood 뿐만 아니라 time의 neighborhood도 고려해야 한다. 이때 state와 optimal control에 대한 필요조건은 기존과 동일하지만(adjoint 방정식과 transversality condition 등), 그들의 정의역은 기존과 달리 final time이 변수이다. 만약 variable final time 를 δ라고 한다면, 기존 adjoint equation에 -p() \*δ+H(,x\*,u\*,p\*,)\*δ가 추가된다(δ는 final state의 변화량으로, final state가 변수일 때 의미가 있다). 이는 Pontaygain’s minimum principle(이하 PMP)를 풀 때 부분적분을 이용하여 식을 정리하기 때문에 발생하는데, 그 과정에서 state와 time의 상수여부에 따라 δ와 δ을 포함한 term의 소실여부가 결정된다. 이에 대한 자세한 증명과정을 보고 싶으면, optimal control theory by donald E Kirk(p228—p234)를 참조하면 된다.

HJB방정식 또는 PMP로 최적제어항을 구할 때, 먼저 optimal control의 존재성을 확인해야 한다. 존재성이 보장된다고 하면 유일성을 증명하거나 기타 다른 방식으로 우리가 얻은 해가 최적이라는 것을 증명해야 한다. 이러한 성질을 보장하는 몇 가지 정리들이 있는데, 이는 다음 시간에 소개할 예정이다.